

## **ELEKTRODINAMIKA PADA KERANGKA YANG DIPERCEPAT**

oleh,  
Dwi Satya Palupi, Muslim, Arief Hermanto

### **ABSTRAK**

Hukum-hukum elektrodinamika dalam kerangka inersial mengalami perubahan terhadap bentuk bakunya menurut teori Maxwell bila diterapkan dalam kerangka dipercepat baik pada kerangka yang berotasi maupun kerangka yang dipercepat linear. Medan-medan elektromagnet pada kerangka yang dipercepat dapat ditransformasikan ke dalam kerangka inersial dengan menggunakan asas kovariansi umum: hukum-hukum dalam bentuk tensor dalam ruang lengkung berdimensi-4 apabila berlaku pada suatu kerangka inersial hukum tersebut akan berlaku pula pada sebarang kerangka. Prinsip tersebut akan digunakan untuk mendapatkan persamaan Maxwell, persamaan konstitusi dan persamaan transformasi medan antara kerangka inersial ke kerangka dipercepat.

Elektrodinamika pada kerangka dipercepat berguna untuk mencari medan-medan yang ditimbulkan oleh sumber yang bergerak dipercepat terhadap kerangka rehatnya yang dapat ditransformasikan ke kerangka laboratorium yang merupakan kerangka inersial dimana berlaku teori Maxwell.

## **ELECTRODYNAMICS IN ACCELERATED FRAME**

by,  
Dwi Satya Palupi, Muslim, Arief Hermanto

### **ABSTRACT**

Electrodynamics laws in inertial frames will undergo a change with respect to its Maxwell standard form when applied to accelerated frames, either in a rotated frame or in a linearly accelerated frame. Electromagnetic fields in accelerated frames can be transformed into those observed from inertial frames using the principle of general covariance: The laws of nature which appear in tensors form in a curved 4-dimensional space-time continuum will be valid in all frames if they are valid in an inertial frame. This principle will be used to find Maxwell equation, constitutive equations, and various transformation rules from inertial frames to accelerated frames.

Electrodynamics in accelerated frames has been used to solve the electromagnetic field problem due to a source undergoing an acceleration with respect to its rest frame by transforming the field observables into their form in the inertial rest frame.

## I. PENDAHULUAN

Dalam Ruang-Waktu  $(x^0 = ct, x^i) = (x^a)$  suatu kerangka inersial memiliki tensor metrik kovarian  $\eta_{00} = 1$  dan  $\eta_{ab} = -\delta_{ab}$ , sedangkan kerangka berotasi  $(ct, r, \theta, z)$  dengan kuadrat elemen garis  $ds^2$

$$ds^2 = (1 - \omega^2 r^2 / c^2)(dct)^2 - dr^2 - r^2(d\theta)^2 - (2\omega r^2 / c)d\theta dct - dz^2 \quad (1)$$

memiliki tensor metrik  $g_{00} = 1 - \omega^2 r^2 / c^2$ ,  $g_{01} = g_{03} = 0$ ,  $g_{02} = -\omega r^2 / c$ ,  $g_{11} = g_{33} = -1$ ,  $g_{22} = -r^2$ , dengan determinan  $|g_{\alpha\beta}| = r^2$ ,  $\omega$  adalah kecepatan sudut rotasi kerangka.

Kerangka dipercepat linear beraturan dengan kuadrat elemen garis  $ds^2$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{az}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2)$$

memiliki tensor metrik  $g_{00} = (1 + az / c^2)^2$ ,  $g_{ab} = -\delta_{ab}$ ,  $g_{0a} = g_{a0}$ , determinan  $|g_{\alpha\beta}| = (1 + az / c^2)^2$  yang memiliki nilai yang sama dengan  $|g_{00}|$ , sedang  $|g| = 1$ , dengan  $a$  adalah percepatan linear kerangka dipercepat. Berbeda dengan tensor metrik pada kerangka dipercepat linear dan tensor metrik pada kerangka inersial, tensor metrik kerangka berotasi bukan tensor diagonal.

## II. MEDAN ELEKTROMAGNET PADA KERANGKA BEROTASI

Medan-medan elektromagnet dalam suatu kerangka dapat dinyatakan dalam bentuk tensor elektromagnet kontravarian  $m^{a\beta}$  dan tensor elektromagnet kovarian  $n_{\alpha\beta}$ .  $m^{a\beta}$  tersusun dari pasangan medan  $\vec{d}$  dan medan  $\vec{h}$  dengan komponen

$$m^{\alpha i} = cd^i / \sqrt{g_{00}}, \quad m^{ik} = \epsilon^{jki} h_j / \sqrt{|g|}$$

Tensor elektromagnet kovarian  $n_{\alpha\beta}$  tersusun dari pasangan medan  $\vec{e}$  dan  $\vec{b}$  dengan komponen  $n_{i0} = e^i / c$ , serta  $n_{jk} = \epsilon_{jki} b^i / \gamma$ , dengan  $|g| = r^2 \sqrt{\gamma} = r^2 (1 - \omega^2 r^2 / c^2)^{1/2}$  (Bladel, 1984).

Medan-medan elektromagnet pada suatu kerangka dapat ditransformasikan ke kerangka inersial dan sebaliknya dengan cara melakukan transformasi pada tensor-tensor elektromagnetnya dengan hubungan

$$M^{\alpha\beta} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} m^{\mu\nu}$$

$$N_{\alpha\beta} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} n_{\mu\nu}$$

yang menghasilkan persamaan transformasi medan antara kerangka berotasi dengan kerangka inersial sebagai berikut (Bladel, 1984)

$$\begin{aligned} D^r &= \frac{d^r}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, & H_r &= h_r + \frac{\omega r d_z}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, \\ D^\theta &= \frac{d^\theta}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, & H_\theta &= h_\theta, \\ D^z &= \frac{d^z}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, & H_z &= h_z - \frac{\omega r d_\theta}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}} \end{aligned} \quad (3)$$

dan

$$\begin{aligned} B^r &= \frac{b^r}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, & E_r &= e_r + \frac{\omega r b_z}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, \\ B^\theta &= \frac{b^\theta}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, & E_\theta &= e_\theta, \\ B^z &= \frac{b^z}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}, & E_z &= e_z - \frac{\omega r b_\theta}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

Komponen medan dengan huruf kecil adalah medan pada kerangka berotasi dengan sistem koordinat  $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, z)$ , sedang komponen yang ditulis dengan huruf besar adalah medan pada kerangka inersial dengan sistem koordinat  $(X^\alpha) = (cT, R, \phi, Z)$ . Persamaan Maxwell dalam bentuk tensor pada kerangka dipercepat adalah (Heers, 1964)

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{\beta}^3 \frac{\partial (\sqrt{|g|} m^{\alpha\beta})}{\partial x^{\beta}} = j^{\alpha} \quad (5)$$

dan

$$\frac{\partial i_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial i_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial i_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

dengan  $j^{\alpha}$  adalah vektor-4 rapat arus,  $j^{\alpha} = \left( \frac{\rho c}{\sqrt{|g_{\infty}|}}, \frac{j^a}{\sqrt{|g_{\infty}|}} \right)$ ,  $j^a$  adalah vektor -3 rapat arus,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  dan  $a = 1, 2, 3$ . Pada koordinat berotasi  $g_{\infty} = 1 - \omega^2 r^2 / c^2$ , dan  $\sqrt{|g|} = r$ .

Pada kerangka yang berotasi persamaan Maxwell tersebut bila dinyatakan dalam vektor-3 berbentuk

$$\begin{aligned} \nabla_r \cdot \vec{d} &= \rho, & \nabla_r \times \vec{e} &= -\vec{\partial} \vec{b} / \partial t, \\ \nabla_r \cdot \vec{b} &= 0, & \nabla_r \times \vec{h} &= -\vec{\partial} \vec{a} / \partial t + \vec{j}, \end{aligned} \quad (6)$$

dengan  $\nabla_r \cdot \vec{a}$  dan  $\nabla_r \times \vec{a}$  adalah operator *div* dan *curl* terhadap sebarang vektor  $\vec{a}$ . Div dan Curl pada kerangka berotasi adalah

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}{r} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{r a^i}{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}} \right) \quad (7)$$

$$(\text{curl } \vec{a})^k = \frac{\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}}{r} \left( \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \right) \epsilon^{kij}, \quad (8)$$

Pada kerangka berotasi terdapat faktor  $\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}$  yang tidak ada pada kerangka inersial.

Persamaan konstitusi dalam bentuk tensor adalah  $n^{\alpha\beta} = \mu_0 m^{\alpha\beta}$ . Tensor  $n^{\alpha\beta}$  yang tersusun dari medan  $\vec{e}$  dan medan  $\vec{b}$  memiliki hubungan sama dengan  $m^{\alpha\beta}$  yang tersusun dari medan  $\vec{d}$  dan medan  $\vec{h}$  dikalikan dengan skalar  $\mu_0$ .  $\mu_0$  adalah

permeabilitas ruang hampa. untuk mendapatkan persamaan konstitusi ditemukan dahulu tensor  $n^{\alpha\beta}$  dari  $n_{\alpha\beta}$ .

Persamaan konstitusi pada kerangka berotasi dinyatakan dalam komponen-komponennya adalah,

$$\begin{aligned} d^r &= \varepsilon_o \sqrt{1 - (\omega r / c)^2} e_r - \varepsilon_o \omega r b^z, \\ d^\theta &= \varepsilon_o \sqrt{1 - (\omega r / c)^2} e_\theta / r^2 \\ d^z &= \varepsilon_o \sqrt{1 - (\omega r / c)^2} e_z + \varepsilon_o \omega r b^r \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_z &= \varepsilon_o \omega r e_r + \sqrt{1 - (\omega r / c)^2} b^z / \mu_o \\ h_r &= -\varepsilon_o \omega r e_z + \sqrt{1 - (\omega r / c)^2} b^r / \mu_o \\ h_\theta &= \sqrt{1 - (\omega r / c)^2} b_\theta / \mu_o \end{aligned} \quad (10)$$

Dalam kerangka yang berotasi, persamaan konstitusi dalam ruang hampa yaitu,  $\vec{d} = \varepsilon_o \vec{e}$  dan  $\vec{h} = \mu_o \vec{b}$  tidak berlaku. Dalam kerangka berotasi medan  $\vec{d}$  tergantung pada medan  $\vec{e}$  maupun medan  $\vec{h}$  secara linear. Dalam kerangka berotasi medan  $\vec{h}$  tidak hanya tergantung pada medan  $\vec{b}$  saja seperti pada kerangka inersial tetapi juga dipengaruhi oleh medan  $\vec{e}$  secara linear. Akibat gerakan rotasi kerangka, ruang hampa tidak isotropis. Disamping itu pada kerangka berotasi secara relativistik terdapat faktor pengali  $\sqrt{1 - (\omega r / c)^2}$ .

Syarat batas pada kerangka rehat sesaat sama seperti jika benda pada keadaan stasioner. Syarat batas pada kerangka yang berotasi dapat ditemukan dengan melakukan transformasi medan pada kerangka rehat sesaat ke kerangka inersial kemudian mentransformasikannya lagi ke kerangka berotasi sehingga dihasilkan syarat batas,

$$\begin{aligned} \hat{u}_n \times (e_r \hat{u}_r + e_{(\theta)} \hat{u}_{(\theta)} + e_z \hat{u}_z) &\text{kontinu di } S \\ \hat{u}_n \cdot (b_r \hat{u}_r + b_{(\theta)} \hat{u}_{(\theta)} + b_z \hat{u}_z) &\text{kontinu di } S, \end{aligned}$$

dengan  $\hat{u}_n$  adalah vektor satuan normal pada bidang batas  $S$ ,  $\hat{u}_r$ ,  $\hat{u}_\theta$  dan  $\hat{u}_z$  adalah vektor satuan sistem koordinat silinder.

Pengamat pada kerangka berotasi yang mengamati suatu muatan berbentuk silinder rehat akan melihat arus konveksi. Meskipun pengamat melihat adanya arus konveksi namun dia tidak melihat adanya medan. Hal tersebut sesuai dengan tensor elektromagnetiknya, dan berarti hukum magnetostatik tidak berlaku pada kerangka yang berotasi (Bladel, 1984).

### III. MEDAN ELEKTROMAGNET PADA KERANGKA DIPERCEPAT LINEAR BERATURAN

Dengan cara yang sama pada kerangka berotasi, dapat diperoleh persamaan transformasi pada kerangka dipercepat linear sebagai berikut (Bladel, 1984)

$$\begin{aligned} D^x &= d^x \cosh \frac{at}{c} + \frac{h_y \sinh \frac{at}{c}}{c(1 + az/c^2)}, \\ D^y &= d^y \cosh \frac{at}{c} - \frac{h_x \sinh \frac{at}{c}}{c(1 + az/c^2)}, \\ D^z &= d^z \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{h_x \cosh \frac{at}{c}}{(1 + az/c^2)} - cd^y \sinh \frac{at}{c}, \\ H_y &= \frac{h_y \cosh \frac{at}{c}}{(1 + az/c^2)} + cd^x \sinh \frac{at}{c}, \\ H_z &= \frac{h_z}{(1 + az/c^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

dengan  $a$  adalah percepatan linear kerangka.

Sedangkan untuk pasangan medan  $\vec{E}$  dan  $\vec{B}$  kaedah transformasinya adalah,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e_x \cosh \frac{at}{c}}{(1 + az / c^2)} + cb_y \sinh \frac{at}{c}, \\ E_y &= \frac{e_y \cosh \frac{at}{c}}{(1 + az / c^2)} - cb_x \sinh \frac{at}{c}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$E_z = \frac{e_z}{(1 + az / c^2)}$$

$$\begin{aligned} B_x &= b_x \cosh \frac{at}{c} + \frac{e_y \sinh \frac{at}{c}}{c(1 + az / c^2)}, \\ B_y &= b_y \cosh \frac{at}{c} - \frac{e_x \sinh \frac{at}{c}}{c(1 + az / c^2)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$B_z = b_z$$

Persamaan Maxwell pada kerangka dipercepat linear beraturan dengan elemen  $ds^2$  pada pers. (2) memiliki tensor metrik dalam ruang dimensi-3  $\gamma$  sama dengan tensor metrik ruang pada kerangka inersial. Dengan demikian div dan curl pada kerangka dipercepat linear sama dengan div dan curl pada kerangka inersial sehingga persamaan Maxwell pada kerangka dipercepat linear memiliki bentuk yang sama dengan persamaan Maxwell pada kerangka inersial.

Persamaan konstitusi pada kerangka dipercepat dapat ditemukan dengan menggunakan tensor-tensor elektromagnetik kovarian  $n^{ab}$  dan  $m^{ab}$  dan persamaan konstitusi dalam bentuk tensor  $n^{ab} = \mu m^{ab}$ , yang menghasilkan persamaan konstitusi

$$\begin{aligned} \vec{d} &= \frac{\epsilon_0 \vec{e}}{(1 + az / c^2)} \\ \vec{b} &= \frac{\mu_0 \vec{h}}{(1 + az / c^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

Persamaan konstitusi dalam kerangka dipercepat linear dalam ruang hampa tampak seperti persamaan konstitusi dalam suatu medium pada kerangka inersial

dengan konstanta permitivitas  $\epsilon_k = (1 + az / c^2)^{-1}$  dan konstanta permeabilitas  $\mu_k = (1 + az / c^2)^{-1}$ . Gerakan kerangka memiliki akibat seperti berada pada suatu medium yang tidak isotrop.

#### IV. KESIMPULAN

Tensor elektromagnetik pada kerangka dipercepat dipengaruhi oleh tensor metrik kerangka tersebut. Sebagai akibatnya persamaan Maxwell dan persamaan konstitusi pada suatu kerangka memiliki bentuk yang berbeda dari pada bentuk mereka dalam kerangka yang lainnya, meskipun apabila dinyatakan dalam bentuk tensor persamaan-persamaan tersebut kovarian.

#### V. DAFTAR PUSTAKA

- van Bleidel, J., 1984, *Relativity and Enginerring*, Springer-Verlag, Berlin.
- Heer, C.V., 1964, *Resonant Frequencies of and Accelerated System of Reference*, Phys. Rev. 134A, 799-804.